

## OPCIÓN A

**A.1.-** Discutir el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y - az = 2 \\ -x + y - z = a - 1 \end{cases}$$

a) Según los valores del parámetro **a**

b) Entre los valores de **a** que hacen el sistema compatible elegir uno en particular y resolver el sistema que resulte al reemplazar **a** por el valor elegido.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 - 2 + a^2 + 1 = a^2 - a - 2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si  $a = -1$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si  $a = 2$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sist. Compat. Indeterminado}$$

b)

Solucionaremos este último caso cuando  $a = 2$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow y - z = 2 \Rightarrow y = z + 2 \Rightarrow 2x + z + 2 - z = 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Solución} \left( -\frac{1}{2}, \lambda + 2, \lambda \right)$$

**A.2** Sea **C** una circunferencia cuyo centro es el punto **(1, 1)** y que es tangente a los dos ejes coordenados

a) Escribir su ecuación general

c) Determinar los puntos de **C** donde la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante

a)

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

b)

$$y = x \Rightarrow m = y' = 1 \Rightarrow \begin{cases} C' \equiv 2x + 2y \cdot y' - 2 - 2y' = 0 \Rightarrow 2x + 2y \cdot 1 - 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2-x)^2 - 2x - 2(2-x) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x - 4 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8 > 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2 - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Puntos pedidos} \Rightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

**A.3.-** Dada la función  $f(x) = x \ln x$

a) Determinar su dominio

b) Determinar sus ceros

c) Determinar sus extremos

a)

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathfrak{R} \\ \ln x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathfrak{R} / x > 0$$

b)

Corte con  $OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \cdot \ln 0 \Rightarrow$  No existe función

$$\text{Corte con } OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{No existe función} \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1, 0)$$

c)

$$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo}$$

$$\text{Mínimo relativo en } x = \frac{1}{e} \Rightarrow f\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) \cdot \ln e = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$$

**A.4.-** Sea la parábola  $y = x^2 - 4x + 3$

a) Determinar los puntos de corte de la parábola con los dos ejes coordenados

b) Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de abscisas

c) Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de ordenadas

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Con } OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow (0, 3) \\ \text{Con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow (3, 0) \\ x = 1 \Rightarrow (1, 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

b)

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0$$

$$A = \left| \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx = \int_3^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_3^1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_3^1 + 3 \cdot [x]_3^1$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 3^3) - 2 \cdot (1^2 - 3^2) + 3 \cdot (1 - 3) = -\frac{26}{3} - 2 \cdot (-8) + 3 \cdot (-2) = -\frac{26}{3} + 16 - 6 = \frac{-26 + 30}{3} = \frac{4}{3} u^2$$

c)

$$A = \left| \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 + 3 \cdot [x]_0^1 =$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0^3) - 2 \cdot (1^2 - 0^2) + 3 \cdot (1 - 0) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} u^2$$

## OPCIÓN B

**B.1** Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ , vemos que, ambas, tienen rango máximo, o sea 2

a) Determinar los valores de  $c$  tales que la matriz  $A+cB$  ya no tenga rango 2

b) Cual es el rango que tienen las respectivas matrices suma

a)

$$A + cB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 4c & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 0 & 2-c+4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$6 - c = 0 \Rightarrow c = 6$$

b)

$$A + 6B = \begin{pmatrix} 1+6 & -1 \\ 4+4 \cdot 6 & 2-6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A + 6B) = 1$$

**B.2.** Sea el triángulo de vértices **A(4 , 2)**, **B(13 , 1)** y **C(6 , 6)**

a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice **C**

b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado **AB**

a)

$$\overrightarrow{AB} = (13, 1) - (4, 2) = (9, -1) \Rightarrow m = -\frac{1}{9} \Rightarrow m' \perp m \Rightarrow m' = (1, 9) \Rightarrow m' = 9 \Rightarrow y - 6 = 9 \cdot (x - 6) \Rightarrow y - 6 = 9x - 54 \Rightarrow 9x - y - 48 = 0$$

b)

$$\begin{cases} 9x - y - 48 = 0 \\ y - 2 = -\frac{1}{9}(x - 4) \Rightarrow 9y - 18 = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - y - 48 = 0 \\ x + 9y - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 81x - 9y - 432 = 0 \\ x + 9y - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow 82x - 454 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{454}{82} = \frac{227}{41} \Rightarrow y = 9 \cdot \frac{227}{41} - 48 = \frac{2043 - 1968}{41} = \frac{75}{41} \Rightarrow P\left(\frac{227}{41}, \frac{75}{41}\right)$$

$$d_{AP} = \sqrt{\left(\frac{227}{41} - 4\right)^2 + \left(\frac{75}{41} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{227 - 164}{41}\right)^2 + \left(\frac{75 - 82}{41}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{163}{41}\right)^2 + \left(\frac{13}{41}\right)^2} = \frac{\sqrt{26569 + 169}}{41}$$

$$d_{AP} = \frac{\sqrt{26738}}{41} u$$

$$d_{BP} = \sqrt{\left(\frac{227}{41} - 13\right)^2 + \left(\frac{75}{41} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{227 - 533}{41}\right)^2 + \left(\frac{75 - 41}{41}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{306}{41}\right)^2 + \left(\frac{34}{41}\right)^2} = \frac{\sqrt{93636 + 1156}}{41}$$

$$d_{BP} = \frac{\sqrt{94792}}{41} u$$

**B.3.-** Sea la función  $f(x) = x \operatorname{sen} x$  y sea **T** la recta tangente a su gráfica en  $x = \pi$ .

Determinar:

a) La ecuación de **T**

b) El área encerrada entre **T** y los ejes coordenados

a)

$$f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x \Rightarrow \begin{cases} f(\pi) = \pi \operatorname{sen} \pi = \pi \cdot 0 = 0 \\ m = f'(\pi) = \operatorname{sen} \pi + \pi \cos \pi = 0 + \pi \cdot (-1) = -\pi \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -\pi(x - \pi) \Rightarrow$$

$$T \equiv \pi x + y - \pi^2 = 0$$

b)

$$y = -\pi x + \pi^2 \Rightarrow \text{Corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow -\pi x + \pi^2 = 0 \Rightarrow \pi x = \pi^2 \Rightarrow x = \pi$$

$$A = \int_0^{\pi} (-\pi x + \pi^2) dx = -\pi \int_0^{\pi} x dx + \pi^2 \int_0^{\pi} dx = -\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^{\pi} + \pi^2 [x]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} (\pi^2 - 0^2) + \pi^2 (\pi - 0)$$

$$A = -\frac{\pi^3}{2} + \pi^3 = \frac{\pi^3}{2} u^2$$

**B.4.**- Sea la función  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

- a) Definir su dominio
- b) Calcular su límite en el infinito
- c) Determinar sus extremos
- d) Calcular el área encerrada por la gráfica de **f** entre las abcisas **0** y **1**



a)

$$\exists f \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \forall x \notin \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

b)

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty^2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

c)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2xx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1)(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x(x^2 + 1) - 2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} = 2 \cdot \frac{-x^3 - x - 1 + x^2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\begin{cases} f''(-1) = -2 \cdot \frac{(-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 1}{[(-1)^2 + 1]^3} = -2 \cdot \frac{-1 - 1 - 1 + 1}{(1 + 1)^3} = -2 \cdot \frac{(-2)}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ f''(1) = -2 \cdot \frac{1^3 - 1^2 + 1 + 1}{[1^2 + 1]^3} = -2 \cdot \frac{1 - 1 + 1 + 1}{(1 + 1)^3} = -2 \cdot \frac{2}{2^3} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(-1) = \frac{(-1)}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{En} \left( -1, -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \text{Mínimo relativo} \\ f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{En} \left( 1, \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \text{Máximo relativo} \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} f(0) = \frac{0}{0^2 + 1} = 0 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \cdot [\ln t]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \ln \sqrt{2} u^2$$

$$x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$